Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN 18. MAI.

**1** Se læreboken.

**2** **a)** Se læreboken.

**b)** Det finnes et punkt $B'$ på $\overrightarrow{CB}$ slik at $\overline{CB'} \cong \overline{EF}$ (Oppgave 5.20). Hvis $B = B'$ er det intet mer å vise. Vi antar derfor at $B \neq B'$, og at $B'$ ligger mellom $B$ og $C$ (Hvis $B$ ligger mellom $B'$ og $C$ er argumentet nedfor helt likt). Da er $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$ (SAS), slik at $\overline{AB'} \cong \overline{DE} \cong \overline{AB}$. Det medfører at $\triangle BAB'$ er likebent, slik at $\angle ABB' \cong \angle AB'B$ (Teorem 5.8.5). Nå er $\mu(\angle AB'C) < 90°$ (ytre vinkel teoremet, 6.3.2), slik at $\mu(\angle AB'B) > 90°$ (supplementvinkel). Da blir også $\mu(\angle ABC) = \mu(\angle ABB') > 90°$. Siden $\mu(\angle BCA) = 90°$ er dette en motsigelse av ytre vinkel teoremet. Altså må $B = B'$ og påstanden følger.

**3** **a)** Se læreboken, bevis for Teorem 9.3.4.

**b)** Se læreboken, bevis for Teorem 9.3.5.

**4** **a)** Se læreboken, Definisjon 10.4.11.

**b)** Konstruer først $\gamma$ og punkt $A$ på en linje gjennom $O$, slik at $OA = \frac{3}{2}$. La $T$ være ett av skjæringspunktene mellom $\gamma$ og $\alpha$. Da er $\mu(\angle OTA) = 90°$ slik at $T$ ligger på sirkelen med senter i midtpunktet av $\overline{OA}$. La $a$ være lik radius i $\alpha$. Da er $a^2 + 1^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, slik at $a = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

**5** **a)** La $P$ være et punkt på $\beta$ og la $R, S$ være skjæringspunktene mellom $\gamma$ og $\overleftrightarrow{OP}$. Da er $OR = OS = 1$, slik at

$$d(O,P) = \left| \ln \frac{OR \cdot PS}{OS \cdot PR} \right| = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Siden $d(O,P)$ er konstant er $\beta$ en hyperbolsk sirkel med senter i $O$ og radius $r_1 = \ln \frac{1+r}{1-r}$.

**b)** La $E, F$ være skjæringspunkter mellom $\beta$ og $\overline{OA}$, slik at $E*O*F*A$. Konstruer $E' = I_\alpha(E)$, $F' = I_\alpha(F)$ (se læreboken side 310). Da er $\overline{E'F'}$ diameter i $\beta'$ (Teorem 12.7.7). Vi har

$$AF' = \frac{a^2}{AF} = \frac{\frac{5}{4}}{1} = \frac{5}{4},$$
$$AE' = \frac{a^2}{AE} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8}.$$

Radius i $\beta'$ er da

$$\frac{1}{2}E'F' = \frac{1}{2}(AF' - AE') = \frac{5}{16}.$$

**c)** Fordi $\alpha \perp \gamma$ bevarer inversjon med hensyn på $\alpha$ hyperbolske avstander. Den hyperbolske sirkel med senter i $O$ avbildes derfor på en hyperbolsk sirkel med senter i $O'$. Det betyr at $\beta'$ har hyperbolsk senter $O'$. Hyperbolsk radius er da lik

$$r_1 = \ln \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \ln 3.$$